СОДЕРЖАНИЕ

[ВВЕДЕНИЕ 4](#_Toc129362093)

[1 Теоретическая часть 5](#_Toc129362094)

[2 Практическая часть 9](#_Toc129362095)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 20](#_Toc129362096)

# ВВЕДЕНИЕ

**Цель работы**: изучение метода Гаусса численного решения квадратной СЛАУ с невырожденной матрицей; оценка числа обусловленности матрицы и исследование его влияния на погрешность приближенного решения.

*Содержание работы*

1. Реализовать метод Гаусса решения СЛАУ (с выбором главного элемента по столбцу).

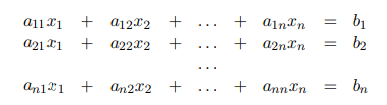
2. Провести решение двух заданных систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, вычислить нормы невязок полученных приближенных решений, их абсолютные и относительные погрешности: (при расчетах пользоваться 1-нормой и inf-нормой).

3. Для каждой из систем оценить порядок числа обусловленности ее матрицы и сделать вывод о его влияют на точность полученного приближенного решения и отвечающую ему невязку.

# Теоретическая часть

**Метод Гаусса**

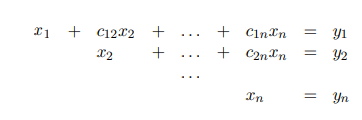
Пусть требуется решить систему линейных уравнений 𝐴𝑥 = 𝑏, где 𝐴 = (𝑎𝑖𝑗 ) ∈ R𝑛×𝑛, 𝑏 = (𝑏𝑖) ∈ R𝑛:



Метод Гаусса состоит из двух частей: прямой ход (сверху вниз) и обратный ход (снизу вверх).

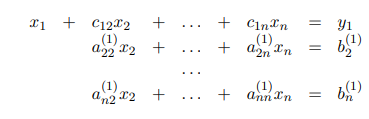
*Прямой ход*

Прямой ход метода Гаусса преобразует матрицу в левой части к треугольному виду с главной диагональю, состоящей из единиц. В результате система линейных уравнений принимает вид

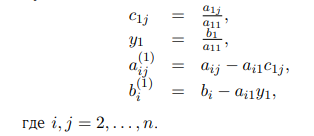


*Первый шаг прямого хода*

Предположим, что 𝑎11 != 0. Первый шаг прямого хода метода Гаусса преобразует систему линейных уравнений следующему к виду



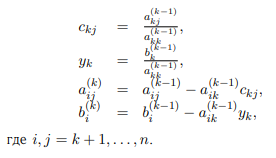
Новые коэффициенты вычисляются по формулам



Далее, этот процесс применяется к подматрице 𝐴(1) = (𝑎(1)𝑖𝑗 ) и вектору правой части 𝑏 =(𝑏(1)𝑖).

*Последующие шаги прямого хода*

Предположим, что сделано 𝑘 − 1 (𝑘 = 2, . . . , 𝑛) шагов прямого хода. Положим



*Обратный ход*

Обратный ход (снизу вверх) метода Гаусса задается следующими формулами.



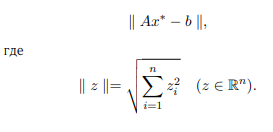
*Свойства*

Утверждение. Метод Гаусса осуществим тогда и только тогда, когда у матрицы 𝐴 все главные угловые миноры отличны от нуля.

Утверждение. Метод Гаусса требует 2/3𝑛3 + 𝑂(𝑛2) арифметических операций.

*Оценка точности*

Учитывая, что арифметические операции выполняются с погрешностью, в результате решения системы уравнений 𝐴𝑥 = 𝑏 будет получено некоторое приближенное решение 𝑥 \* ≈ 𝑥. Точность приближения оценивается с помощью величины



**Модификации метода Гаусса**

*Первый шаг прямого хода*

Внесем следующее изменение в первый шаг прямого хода метода Гаусса. В самом начале найдем уравнение с максимальным по модулю коэффициентом при переменной 𝑥1. Поменяем местами это и первое уравнение.

Аналогичные изменения внесем и в последующие шаги прямого хода метода Гаусса. Получившийся алгоритм носит название метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

Заметим, что все переменные равноправны друг с другом. Поэтому на первом шаге метода Гаусса можно найти переменную с максимальным по модулю коэффициентом в первом уравнении. Поменяем друг с другом номера этой и первой переменной.

Аналогичные изменения внесем и в последующие шаги прямого хода метода Гаусса. В результате получим метод Гаусса с выбором главного элемента по строке.

Максимальный по модулю элемент можно искать и по всей матрице. С помощью перестановки уравнений и перенумерования переменных можно добиться, чтобы этот элемент был коэффициентом при первой переменной в первом уравнении. Подобная модификация алгоритма называется методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице.

*Свойства*

Утверждение. Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу (строке, всей матрице) осуществим тогда и только тогда, когда det 𝐴 != 0.

Утверждение. Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу (строке) требует 2/3 𝑛3 +𝑂(𝑛2) арифметических операций.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице требует 𝑛3 + 𝑂(𝑛2) арифметических операций.

# Практическая часть

*Проведем расчет хорошо обусловленной матрицы*

**Начальные условия**

%Функция для решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

%Coef - матрица коэффициентов, В - матрица значений.

%исходные данные 30 вариант

%хорошо обусловленная матрица

Coef = [85.2000 0.8300 -9.6400 -1.1000;

4.5800 40.6000 3.7000 -4.9900;

0.0000 -4.6700 23.6000 -1.8600;

-7.0800 8.3400 7.7700 88.2000;

];

B = [-1228.6000;

36.8700;

86.9200;

58.6800;

];

X = [-14;

2;

4;

-1;

];

% плохо обусловленная матрица

% Coef = [ -294.2770 50.2440 -294.2790 1.8060;

% 128.2260 -21.3720 128.2260 0.0000;

% 315.9480 -53.8560 315.9500 -1.8060;

% 105.3160 -17.9520 105.3160 -0.6000;

% ];

%

% B = [-13.8760;

% 42.7320;

% 21.0980;

% 7.1120;

% ];

% X = [1;

% 10;

% 1;

% 40;

% ];

%

disp('Матрица коэфициентов по условию:');

Матрица коэфициентов по условию:

disp(Coef);

85.2000 0.8300 -9.6400 -1.1000

4.5800 40.6000 3.7000 -4.9900

0 -4.6700 23.6000 -1.8600

-7.0800 8.3400 7.7700 88.2000

disp('Матрица значений по условию:');

Матрица значений по условию:

disp(B);

1.0e+03 \*

-1.2286

0.0369

0.0869

0.0587

A = [Coef B]; %Конкатенировали матрицу с к-ми иксов и ответами

%X = zeros(length(answ),1); %"Заготовка" под ответы

disp('Обобщенная матрица:');

Обобщенная матрица:

disp(A);

1.0e+03 \*

0.0852 0.0008 -0.0096 -0.0011 -1.2286

0.0046 0.0406 0.0037 -0.0050 0.0369

0 -0.0047 0.0236 -0.0019 0.0869

-0.0071 0.0083 0.0078 0.0882 0.0587

[rows, cols]=size(A); %определение кол-ва строк и столбцов в матрице

**Прямой ход метода Гаусса**

%disp("Прямой ход метода Гаусса");

for j = 1:rows

disp("Итерация: " + j);

%----Перестановка исходной матрицы-------------------------------

[M,P] = max(abs(A(j:rows,j))); %поиск максимума в столбце на итерацию

% disp("поиск максимума в столбце на итерацию");

% disp([M,P]);

C = A(j,:); %Резерв для возврата

% disp("Резерв для возврата");

% disp(C);

A(j,:) = A(P+j-1,:); %Перестановки строки с максимумом на j строку

% disp("Перестановки строки с максимумом наверх")

% %disp(A(j,:))

% disp(A(:,:));

A(P+j-1,:) = C; % Замена j строки на

% disp("Учет прошлой перестановки")

% %disp(C);

% disp(A(:,:));

%----------------------------------------------------------------

if A(j,j) ~= 0

A(j,:) = A(j,:)/A(j,j); % Нормировка j-ой строки

disp("Нормировка j-ой строки")

disp(A(:,:));

%прямой ход

for i = j+1:rows

k = A(i,j)/A(j,j); %%Вычисление нормирующего коэффициента для строки

A(i,:)=A(i,:)-k\*A(j,:); %Вычитание строки с нормирующим коэффициентом

end

disp("Итоговая матрица по итерации: " + j)

disp(A(:,:));

else

error('Один из слобцов не содержит ненулевых элементов');

end

end

Итерация: 1

Нормировка j-ой строки

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

4.5800 40.6000 3.7000 -4.9900 36.8700

0 -4.6700 23.6000 -1.8600 86.9200

-7.0800 8.3400 7.7700 88.2000 58.6800

Итоговая матрица по итерации: 1

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 40.5554 4.2182 -4.9309 102.9145

0 -4.6700 23.6000 -1.8600 86.9200

0 8.4090 6.9689 88.1086 -43.4149

Итерация: 2

Нормировка j-ой строки

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 -4.6700 23.6000 -1.8600 86.9200

0 8.4090 6.9689 88.1086 -43.4149

Итоговая матрица по итерации: 2

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 0 24.0857 -2.4278 98.7707

0 0 6.0943 89.1310 -64.7538

Итерация: 3

Нормировка j-ой строки

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 0 1.0000 -0.1008 4.1008

0 0 6.0943 89.1310 -64.7538

Итоговая матрица по итерации: 3

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 0 1.0000 -0.1008 4.1008

0 0 0 89.7453 -89.7453

Итерация: 4

Нормировка j-ой строки

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 0 1.0000 -0.1008 4.1008

0 0 0 1.0000 -1.0000

Итоговая матрица по итерации: 4

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 0 1.0000 -0.1008 4.1008

0 0 0 1.0000 -1.0000

%disp("Обратный ход метода Гаусса");

**Обратный ход метода Гаусса**

for j = rows:-1:1

for i = j - 1:-1:1

%disp([j,i]);

k = A(i,j)/A(j,j); %%Вычисление нормирующего коэффициента для строки

A(i,:)=A(i,:)-k\*A(j,:); %Вычитание строки с нормирующим коэффициентом

end

disp(A(:,:))

end

1.0000 0.0097 -0.1131 0 -14.4331

0 1.0000 0.1040 0 2.4160

0 0 1.0000 0 4.0000

0 0 0 1.0000 -1.0000

1.0000 0.0097 0 0 -13.9805

0 1.0000 0 0 2.0000

0 0 1.0000 0 4.0000

0 0 0 1.0000 -1.0000

1.0000 0 0 0 -14.0000

0 1.0000 0 0 2.0000

0 0 1.0000 0 4.0000

0 0 0 1.0000 -1.0000

1.0000 0 0 0 -14.0000

0 1.0000 0 0 2.0000

0 0 1.0000 0 4.0000

0 0 0 1.0000 -1.0000

M = A(:,cols);

**Решение исходной системы:**

disp(M);

-14.0000

2.0000

4.0000

-1.0000

**Расчеты невязок**

%Невязка

Nev = (B - (Coef\*M));

n1 = norm(Nev, 1);

disp("Невязка (1 норма): " + n1);

Невязка (1 норма): 4.9738e-14

ni = norm(Nev, inf);

disp("Невязка (Inf норма): " + ni);

Невязка (Inf норма): 2.1316e-14

D = (X - M);

disp("D = "+ D);

"D = -1.7764e-15"

"D = 0"

"D = 4.4409e-16"

"D = -1.1102e-16"

**Расчеты абсолютной погрешности**

D1 = norm(D, 1);

disp("Абсолютная погрешность (1 норма): " + D1);

Абсолютная погрешность (1 норма): 2.3315e-15

D2 = norm(D, inf);

disp("Абсолютная погрешность (Inf норма): " + D2);

Абсолютная погрешность (Inf норма): 1.7764e-15

**Расчеты относительной погрешности**

d1 = norm(D, 1)/norm(X, 1);

disp("Относительная погрешность (1 норма): " + d1);

Относительная погрешность (1 норма): 1.1102e-16

d2 = norm(D, Inf)/norm(X, inf);

disp("Относительная погрешность (Inf норма): " + d2);

Относительная погрешность (Inf норма): 1.2688e-16

**Расчеты чисел обусловленностиности**

M = inv(Coef);

disp("Обратная матрица:");

Обратная матрица:

disp(M);

0.0117 0.0002 0.0047 0.0003

-0.0012 0.0239 -0.0046 0.0012

-0.0001 0.0045 0.0412 0.0011

0.0011 -0.0026 -0.0028 0.0111

V1 = norm(Coef, 1)\*norm(M, 1);

disp("Число обусловленности (1 норма): " + V1);

Число обусловленности (1 норма): 5.1684

Vinf = norm(Coef, inf)\*norm(M, inf);

disp("Число обусловленности (Inf норма): " + Vinf);

Число обусловленности (Inf норма)5.2378

*Проведем расчет плохо обусловленной матрицы*

**Начальные условия**

%Функция для решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

%Coef - матрица коэффициентов, В - матрица значений.

%исходные данные 30 вариант

%хорошо обусловленная матрица

% Coef = [85.2000 0.8300 -9.6400 -1.1000;

% 4.5800 40.6000 3.7000 -4.9900;

% 0.0000 -4.6700 23.6000 -1.8600;

% -7.0800 8.3400 7.7700 88.2000;

% ];

% B = [-1228.6000;

% 36.8700;

% 86.9200;

% 58.6800;

% ];

% X = [-14;

% 2;

% 4;

% -1;

% ];

% плохо обусловленная матрица

Coef = [ -294.2770 50.2440 -294.2790 1.8060;

128.2260 -21.3720 128.2260 0.0000;

315.9480 -53.8560 315.9500 -1.8060;

105.3160 -17.9520 105.3160 -0.6000;

];

B = [-13.8760;

42.7320;

21.0980;

7.1120;

];

X = [1;

10;

1;

40;

];

disp('Матрица коэфициентов по условию:');

Матрица коэфициентов по условию:

disp(Coef);

-294.2770 50.2440 -294.2790 1.8060

128.2260 -21.3720 128.2260 0

315.9480 -53.8560 315.9500 -1.8060

105.3160 -17.9520 105.3160 -0.6000

disp('Матрица значений по условию:');

Матрица значений по условию:

disp(B);

-13.8760

42.7320

21.0980

7.1120

A = [Coef B]; %Конкатенировали матрицу с к-ми иксов и ответами

%X = zeros(length(answ),1); %"Заготовка" под ответы

disp('Обобщенная матрица:');

Обобщенная матрица:

disp(A);

-294.2770 50.2440 -294.2790 1.8060 -13.8760

128.2260 -21.3720 128.2260 0 42.7320

315.9480 -53.8560 315.9500 -1.8060 21.0980

105.3160 -17.9520 105.3160 -0.6000 7.1120

[rows, cols]=size(A); %определение кол-ва строк и столбцов в матрице

**Прямой ход метода Гаусса**

%disp("Прямой ход метода Гаусса");

for j = 1:rows

disp("Итерация: " + j);

%----Перестановка исходной матрицы-------------------------------

[M,P] = max(abs(A(j:rows,j))); %поиск максимума в столбце на итерацию

% disp("поиск максимума в столбце на итерацию");

% disp([M,P]);

C = A(j,:); %Резерв для возврата

% disp("Резерв для возврата");

% disp(C);

A(j,:) = A(P+j-1,:); %Перестановки строки с максимумом на j строку

% disp("Перестановки строки с максимумом наверх")

% %disp(A(j,:))

% disp(A(:,:));

A(P+j-1,:) = C; % Замена j строки на

% disp("Учет прошлой перестановки")

% %disp(C);

% disp(A(:,:));

%----------------------------------------------------------------

if A(j,j) ~= 0

A(j,:) = A(j,:)/A(j,j); % Нормировка j-ой строки

disp("Нормировка j-ой строки")

disp(A(:,:));

%прямой ход

for i = j+1:rows

k = A(i,j)/A(j,j); %%Вычисление нормирующего коэффициента для строки

A(i,:)=A(i,:)-k\*A(j,:); %Вычитание строки с нормирующим коэффициентом

end

disp("Итоговая матрица по итерации: " + j)

disp(A(:,:));

else

error('Один из слобцов не содержит ненулевых элементов');

end

end

Итерация: 1

Нормировка j-ой строки

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

128.2260 -21.3720 128.2260 0 42.7320

-294.2770 50.2440 -294.2790 1.8060 -13.8760

105.3160 -17.9520 105.3160 -0.6000 7.1120

Итоговая матрица по итерации: 1

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 0.4852 -0.0008 0.7330 34.1695

0 0.0820 -0.0001 0.1239 5.7749

0 0 -0.0007 0.0020 0.0793

Итерация: 2

Нормировка j-ой строки

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0.0820 -0.0001 0.1239 5.7749

0 0 -0.0007 0.0020 0.0793

Итоговая матрица по итерации: 2

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0 0.0000 -0.0000 -0.0001

0 0 -0.0007 0.0020 0.0793

Итерация: 3

Нормировка j-ой строки

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0 1.0000 -3.0000 -119.0000

0 0 0.0000 -0.0000 -0.0001

Итоговая матрица по итерации: 3

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0 1.0000 -3.0000 -119.0000

0 0 0 -0.0000 -0.0001

Итерация: 4

Нормировка j-ой строки

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0 1.0000 -3.0000 -119.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

Итоговая матрица по итерации: 4

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0 1.0000 -3.0000 -119.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

%disp("Обратный ход метода Гаусса");

**Обратный ход метода Гаусса**

for j = rows:-1:1

for i = j - 1:-1:1

%disp([j,i]);

k = A(i,j)/A(j,j); %%Вычисление нормирующего коэффициента для строки

A(i,:)=A(i,:)-k\*A(j,:); %Вычитание строки с нормирующим коэффициентом

end

disp(A(:,:))

end

1.0000 -0.1705 1.0000 0 0.2954

0 1.0000 -0.0017 0 9.9983

0 0 1.0000 0 1.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

1.0000 -0.1705 0 0 -0.7046

0 1.0000 0 0 10.0000

0 0 1.0000 0 1.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

1.0000 0 0 0 1.0000

0 1.0000 0 0 10.0000

0 0 1.0000 0 1.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

1.0000 0 0 0 1.0000

0 1.0000 0 0 10.0000

0 0 1.0000 0 1.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

M = A(:,cols);

**Решение исходной системы:**

disp(M);

1.0000

10.0000

1.0000

40.0000

**Расчеты невязок**

%Невязка

Nev = (B - (Coef\*M));

n1 = norm(Nev, 1);

disp("Невязка (1 норма): " + n1);

Невязка (1 норма): 2.3803e-13

ni = norm(Nev, inf);

disp("Невязка (Inf норма): " + ni);

Невязка (Inf норма): 9.4147e-14

D = (X - M);

disp("D = "+ D);

"D = -8.147e-09"

"D = -3.7712e-09"

"D = 7.5184e-09"

"D = 2.5048e-09"

**Расчеты абсолютной погрешности**

D1 = norm(D, 1);

disp("Абсолютная погрешность (1 норма): " + D1);

Абсолютная погрешность (1 норма): 2.1941e-08

D2 = norm(D, inf);

disp("Абсолютная погрешность (Inf норма): " + D2);

Абсолютная погрешность (Inf норма): 8.147e-09

**Расчеты относительной погрешности**

d1 = norm(D, 1)/norm(X, 1);

disp("Относительная погрешность (1 норма): " + d1);

Относительная погрешность (1 норма): 4.2195e-10

d2 = norm(D, Inf)/norm(X, inf);

disp("Относительная погрешность (Inf норма): " + d2);

Относительная погрешность (Inf норма): 2.0368e-10

**Расчеты чисел обусловленностиности**

M = inv(Coef);

disp("Обратная матрица:");

Обратная матрица:

disp(M);

1.0e+05 \*

9.2290 -1.5598 9.2240 0.0151

4.2742 -0.7224 4.2742 0.0000

-8.5166 1.4394 -8.5116 -0.0151

-2.8389 0.4798 -2.8389 -0.0000

V1 = norm(Coef, 1)\*norm(M, 1);

disp("Число обусловленности (1 норма): " + V1);

Число обусловленности (1 норма): 2097502206.271

Vinf = norm(Coef, inf)\*norm(M, inf);

disp("Число обусловленности (Inf норма): " + Vinf);

Число обусловленности (Inf норма): 1377034856.6124

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам практической работы можно заметить, что матрицы с большими числами обусловленности (плохо обусловленные) имеют большие значения относительных и абсолютных погрешностей. Иными словами решения таких матриц менее точные.