СОДЕРЖАНИЕ

[ВВЕДЕНИЕ 2](#_Toc129446961)

[1 Теоретическая часть 3](#_Toc129446962)

[2 Практическая часть 7](#_Toc129446963)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 17](#_Toc129446964)

# ВВЕДЕНИЕ

**Цель работы**: изучение метода Гаусса численного решения квадратной СЛАУ с невырожденной матрицей; оценка числа обусловленности матрицы и исследование его влияния на погрешность приближенного решения.

*Содержание работы*

1. Реализовать метод Гаусса решения СЛАУ (с выбором главного элемента по столбцу).

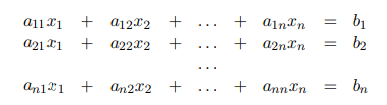
2. Провести решение двух заданных систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, вычислить нормы невязок полученных приближенных решений, их абсолютные и относительные погрешности: (при расчетах пользоваться 1-нормой и inf-нормой).

3. Для каждой из систем оценить порядок числа обусловленности ее матрицы и сделать вывод о его влиянии на точность полученного приближённого решения и отвечающую ему невязку.

# Теоретическая часть

**Метод Гаусса**

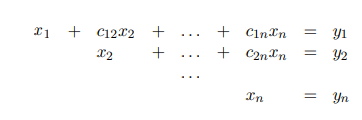
Пусть требуется решить систему линейных уравнений: 𝐴𝑥 = 𝑏, где 𝐴 = (𝑎𝑖𝑗) ∈ R𝑛×𝑛, 𝑏 = (𝑏𝑖) ∈ R𝑛, :



Метод Гаусса состоит из двух частей: прямой ход (сверху вниз) и обратный ход (снизу вверх).

*Прямой ход*

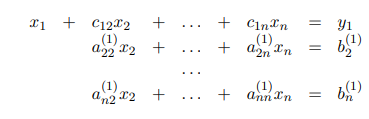
Прямой ход метода Гаусса преобразует матрицу в левой части к треугольному виду с главной диагональю, состоящей из единиц. В результате система линейных уравнений принимает вид:



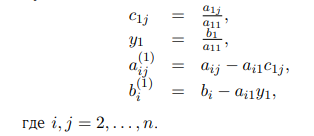
*Первый шаг прямого хода*

Предположим, что 𝑎11 0. Исключим из всех уравнений с номерами со 2-ого по n-ое. Для этого разделим первое уравнение на 𝑎11 0 и вычтем из i-ого уравнения (, , первое, умноженное на .

Первый шаг прямого хода метода Гаусса преобразует систему линейных уравнений следующему к виду:



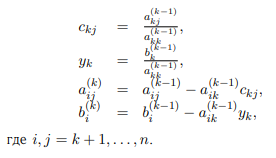
Новые коэффициенты вычисляются по формулам:



Далее этот процесс применяется к подматрице 𝐴(1) = (𝑎(1)𝑖𝑗 ) и вектору правой части 𝑏 =(𝑏(1)𝑖).

*Последующие шаги прямого хода*

Предположим, что сделано 𝑘 − 1 (𝑘 = 2, , 𝑛) шагов прямого хода. Тогда на k-ом шаге при условии можно исключить из уравнений с (k+1) до n-ого: разделим k-ое уравнение на и вычтем из каждого i-ого уравнения (, , k-ое, умноженное на . Соответственно, новые коэффициенты будут определяться по формулам:



*Обратный ход*

Обратный ход (снизу вверх) метода Гаусса состоит в последовательном нахождении неизвестных , , , системы , получившейся на последнем n-ом шаге прямого хода. При нахождении этих неизвестных пользуются следующими формулами:



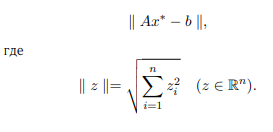
*Свойства*

Утверждение. Метод Гаусса применим тогда и только тогда, когда у матрицы 𝐴 все главные угловые миноры отличны от нуля.

Утверждение. Метод Гаусса требует 2/3𝑛3 + 𝑂(𝑛2) арифметических операций.

*Оценка точности*

Учитывая, что арифметические операции выполняются с погрешностью, в результате решения системы уравнений 𝐴𝑥 = 𝑏 будет получено некоторое приближенное решение 𝑥 \* ≈ 𝑥. Точность приближения оценивается с помощью величины, называемой *нормой невязки*:



*Невязка* – это количественная мера несоответствия между правыми и левыми частями системы уравнений при подстановке в них вычислительного решения. Очевидно, что равенство нулю вектора ошибок влечёт за собой равенство нулю вектора невязок. Величина, стоящая под знаком нормы, носит название *вектора невязок*.

Также можно провести оценку погрешностей.

Формула для оценки *абсолютной погрешности*:

Формула для оценки *относительной погрешности*:

где – число обусловленности матрицы А;

– относительная погрешность задания вектора правых частей исходной СЛАУ.

*Число обусловленности матрицы* –количественная мера обусловленности СЛАУ . В зависимости от требований к точности решения может вычисляться с использованием различных видов норм матрицы. Всегда верно:

Если , матрица А называется хорошо обусловленной; при выполнении условия матрица называется плохо обусловленной.

**Метод Гаусса решения СЛАУ с выбором главного элемента по столбцу (модификация метода Гаусса).**

*Первый шаг прямого хода*

Внесём следующее изменение в первый шаг прямого хода метода Гаусса. В самом начале найдём уравнение с максимальным по модулю коэффициентом при переменной 𝑥1. Поменяем местами это и первое уравнение.Аналогичные изменения внесём и в последующие шаги прямого хода метода Гаусса. Получившийся алгоритм носит название *метода Гаусса с выбором главного элемента по столбцу*. Отличие от метода Гаусса состоит в том, что на каждом шаге прямого хода перед исключением неизвестного осуществляется перестановка уравнений.

*Свойства*

Утверждение. Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу применим тогда и только тогда, когда det 𝐴 0.

Утверждение. Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу требует 2/3 𝑛3 +𝑂(𝑛2) арифметических операций.

# Практическая часть

*Проведем расчёт хорошо обусловленной матрицы*

**Начальные условия**

%Функция для решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

%Coef - матрица коэффициентов, В - матрица значений.

%исходные данные 30 вариант

%хорошо обусловленная матрица

Coef = [85.2000 0.8300 -9.6400 -1.1000;

4.5800 40.6000 3.7000 -4.9900;

0.0000 -4.6700 23.6000 -1.8600;

-7.0800 8.3400 7.7700 88.2000;

];

B = [-1228.6000;

36.8700;

86.9200;

58.6800;

];

X = [-14;

2;

4;

-1;

];

disp('Матрица коэфициентов по условию:');

Матрица коэфициентов по условию:

disp(Coef);

85.2000 0.8300 -9.6400 -1.1000

4.5800 40.6000 3.7000 -4.9900

0 -4.6700 23.6000 -1.8600

-7.0800 8.3400 7.7700 88.2000

disp('Матрица значений по условию:');

Матрица значений по условию:

disp(B);

1.0e+03 \*

-1.2286

0.0369

0.0869

0.0587

A = [Coef B]; %Конкатенировали матрицу с к-ми иксов и ответами

%X = zeros(length(answ),1); %"Заготовка" под ответы

disp('Обобщенная матрица:');

Обобщенная матрица:

disp(A);

1.0e+03 \*

0.0852 0.0008 -0.0096 -0.0011 -1.2286

0.0046 0.0406 0.0037 -0.0050 0.0369

0 -0.0047 0.0236 -0.0019 0.0869

-0.0071 0.0083 0.0078 0.0882 0.0587

[rows, cols]=size(A); %определение кол-ва строк и столбцов в матрице

**Прямой ход метода Гаусса**

%disp("Прямой ход метода Гаусса");

for j = 1:rows

disp("Итерация: " + j);

%----Перестановка исходной матрицы-------------------------------

[M,P] = max(abs(A(j:rows,j))); %поиск максимума в столбце на итерацию

% disp("поиск максимума в столбце на итерацию");

% disp([M,P]);

C = A(j,:); %Резерв для возврата

% disp("Резерв для возврата");

% disp(C);

A(j,:) = A(P+j-1,:); %Перестановки строки с максимумом на j строку

% disp("Перестановки строки с максимумом наверх")

% %disp(A(j,:))

% disp(A(:,:));

A(P+j-1,:) = C; % Замена j строки на

% disp("Учет прошлой перестановки")

% %disp(C);

% disp(A(:,:));

%----------------------------------------------------------------

if A(j,j) ~= 0

A(j,:) = A(j,:)/A(j,j); % Нормировка j-ой строки

disp("Нормировка j-ой строки")

disp(A(:,:));

%прямой ход

for i = j+1:rows

k = A(i,j)/A(j,j); %%Вычисление нормирующего коэффициента для строки

A(i,:)=A(i,:)-k\*A(j,:); %Вычитание строки с нормирующим коэффициентом

end

disp("Итоговая матрица по итерации: " + j)

disp(A(:,:));

else

error('Один из слобцов не содержит ненулевых элементов');

end

end

Итерация: 1

Нормировка j-ой строки

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

4.5800 40.6000 3.7000 -4.9900 36.8700

0 -4.6700 23.6000 -1.8600 86.9200

-7.0800 8.3400 7.7700 88.2000 58.6800

Итоговая матрица по итерации: 1

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 40.5554 4.2182 -4.9309 102.9145

0 -4.6700 23.6000 -1.8600 86.9200

0 8.4090 6.9689 88.1086 -43.4149

Итерация: 2

Нормировка j-ой строки

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 -4.6700 23.6000 -1.8600 86.9200

0 8.4090 6.9689 88.1086 -43.4149

Итоговая матрица по итерации: 2

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 0 24.0857 -2.4278 98.7707

0 0 6.0943 89.1310 -64.7538

Итерация: 3

Нормировка j-ой строки

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 0 1.0000 -0.1008 4.1008

0 0 6.0943 89.1310 -64.7538

Итоговая матрица по итерации: 3

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 0 1.0000 -0.1008 4.1008

0 0 0 89.7453 -89.7453

Итерация: 4

Нормировка j-ой строки

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 0 1.0000 -0.1008 4.1008

0 0 0 1.0000 -1.0000

Итоговая матрица по итерации: 4

1.0000 0.0097 -0.1131 -0.0129 -14.4202

0 1.0000 0.1040 -0.1216 2.5376

0 0 1.0000 -0.1008 4.1008

0 0 0 1.0000 -1.0000

%disp("Обратный ход метода Гаусса");

**Обратный ход метода Гаусса**

for j = rows:-1:1

for i = j - 1:-1:1

%disp([j,i]);

k = A(i,j)/A(j,j); %%Вычисление нормирующего коэффициента для строки

A(i,:)=A(i,:)-k\*A(j,:); %Вычитание строки с нормирующим коэффициентом

end

disp(A(:,:))

end

1.0000 0.0097 -0.1131 0 -14.4331

0 1.0000 0.1040 0 2.4160

0 0 1.0000 0 4.0000

0 0 0 1.0000 -1.0000

1.0000 0.0097 0 0 -13.9805

0 1.0000 0 0 2.0000

0 0 1.0000 0 4.0000

0 0 0 1.0000 -1.0000

1.0000 0 0 0 -14.0000

0 1.0000 0 0 2.0000

0 0 1.0000 0 4.0000

0 0 0 1.0000 -1.0000

1.0000 0 0 0 -14.0000

0 1.0000 0 0 2.0000

0 0 1.0000 0 4.0000

0 0 0 1.0000 -1.0000

M = A(:,cols);

**Решение исходной системы:**

disp(M);

-14.0000

2.0000

4.0000

-1.0000

**Расчёт невязок**

%Невязка

Nev = (B - (Coef\*M));

n1 = norm(Nev, 1);

disp("Невязка (1 норма): " + n1);

Невязка (1 норма): 4.9738e-14

ni = norm(Nev, inf);

disp("Невязка (Inf норма): " + ni);

Невязка (Inf норма): 2.1316e-14

**Расчёт абсолютной погрешности**

D = (X - M);

disp("D = "+ D);

"D = -1.7764e-15"

"D = 0"

"D = 4.4409e-16"

"D = -1.1102e-16"

D1 = norm(D, 1);

disp("Абсолютная погрешность (1 норма): " + D1);

Абсолютная погрешность (1 норма): 2.3315e-15

D2 = norm(D, inf);

disp("Абсолютная погрешность (Inf норма): " + D2);

Абсолютная погрешность (Inf норма): 1.7764e-15

**Расчёт относительной погрешности**

d1 = norm(D, 1)/norm(X, 1);

disp("Относительная погрешность (1 норма): " + d1);

Относительная погрешность (1 норма): 1.1102e-16

d2 = norm(D, Inf)/norm(X, inf);

disp("Относительная погрешность (Inf норма): " + d2);

Относительная погрешность (Inf норма): 1.2688e-16

**Расчёт чисел обусловленности**

M = inv(Coef);

disp("Обратная матрица:");

Обратная матрица:

disp(M);

0.0117 0.0002 0.0047 0.0003

-0.0012 0.0239 -0.0046 0.0012

-0.0001 0.0045 0.0412 0.0011

0.0011 -0.0026 -0.0028 0.0111

V1 = norm(Coef, 1)\*norm(M, 1);

disp("Число обусловленности (1 норма): " + V1);

Число обусловленности (1 норма): 5.1684

Vinf = norm(Coef, inf)\*norm(M, inf);

disp("Число обусловленности (Inf норма): " + Vinf);

Число обусловленности (Inf норма)5.2378

*Проведем расчёт плохо обусловленной матрицы*

**Начальные условия**

%Функция для решения СЛАУ методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу.

%Coef - матрица коэффициентов, В - матрица значений.

%исходные данные 30 вариант

Coef = [ -294.2770 50.2440 -294.2790 1.8060;

128.2260 -21.3720 128.2260 0.0000;

315.9480 -53.8560 315.9500 -1.8060;

105.3160 -17.9520 105.3160 -0.6000;

];

B = [-13.8760;

42.7320;

21.0980;

7.1120;

];

X = [1;

10;

1;

40;

];

disp('Матрица коэфициентов по условию:');

Матрица коэфициентов по условию:

disp(Coef);

-294.2770 50.2440 -294.2790 1.8060

128.2260 -21.3720 128.2260 0

315.9480 -53.8560 315.9500 -1.8060

105.3160 -17.9520 105.3160 -0.6000

disp('Матрица значений по условию:');

Матрица значений по условию:

disp(B);

-13.8760

42.7320

21.0980

7.1120

A = [Coef B]; %Конкатенировали матрицу с к-ми иксов и ответами

%X = zeros(length(answ),1); %"Заготовка" под ответы

disp('Обобщенная матрица:');

Обобщенная матрица:

disp(A);

-294.2770 50.2440 -294.2790 1.8060 -13.8760

128.2260 -21.3720 128.2260 0 42.7320

315.9480 -53.8560 315.9500 -1.8060 21.0980

105.3160 -17.9520 105.3160 -0.6000 7.1120

[rows, cols]=size(A); %определение кол-ва строк и столбцов в матрице

**Прямой ход метода Гаусса**

%disp("Прямой ход метода Гаусса");

for j = 1:rows

disp("Итерация: " + j);

%----Перестановка исходной матрицы-------------------------------

[M,P] = max(abs(A(j:rows,j))); %поиск максимума в столбце на итерацию

% disp("поиск максимума в столбце на итерацию");

% disp([M,P]);

C = A(j,:); %Резерв для возврата

% disp("Резерв для возврата");

% disp(C);

A(j,:) = A(P+j-1,:); %Перестановки строки с максимумом на j строку

% disp("Перестановки строки с максимумом наверх")

% %disp(A(j,:))

% disp(A(:,:));

A(P+j-1,:) = C; % Замена j строки на

% disp("Учет прошлой перестановки")

% %disp(C);

% disp(A(:,:));

%----------------------------------------------------------------

if A(j,j) ~= 0

A(j,:) = A(j,:)/A(j,j); % Нормировка j-ой строки

disp("Нормировка j-ой строки")

disp(A(:,:));

%прямой ход

for i = j+1:rows

k = A(i,j)/A(j,j); %%Вычисление нормирующего коэффициента для строки

A(i,:)=A(i,:)-k\*A(j,:); %Вычитание строки с нормирующим коэффициентом

end

disp("Итоговая матрица по итерации: " + j)

disp(A(:,:));

else

error('Один из слобцов не содержит ненулевых элементов');

end

end

Итерация: 1

Нормировка j-ой строки

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

128.2260 -21.3720 128.2260 0 42.7320

-294.2770 50.2440 -294.2790 1.8060 -13.8760

105.3160 -17.9520 105.3160 -0.6000 7.1120

Итоговая матрица по итерации: 1

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 0.4852 -0.0008 0.7330 34.1695

0 0.0820 -0.0001 0.1239 5.7749

0 0 -0.0007 0.0020 0.0793

Итерация: 2

Нормировка j-ой строки

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0.0820 -0.0001 0.1239 5.7749

0 0 -0.0007 0.0020 0.0793

Итоговая матрица по итерации: 2

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0 0.0000 -0.0000 -0.0001

0 0 -0.0007 0.0020 0.0793

Итерация: 3

Нормировка j-ой строки

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0 1.0000 -3.0000 -119.0000

0 0 0.0000 -0.0000 -0.0001

Итоговая матрица по итерации: 3

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0 1.0000 -3.0000 -119.0000

0 0 0 -0.0000 -0.0001

Итерация: 4

Нормировка j-ой строки

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0 1.0000 -3.0000 -119.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

Итоговая матрица по итерации: 4

1.0000 -0.1705 1.0000 -0.0057 0.0668

0 1.0000 -0.0017 1.5106 70.4231

0 0 1.0000 -3.0000 -119.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

%disp("Обратный ход метода Гаусса");

**Обратный ход метода Гаусса**

for j = rows:-1:1

for i = j - 1:-1:1

%disp([j,i]);

k = A(i,j)/A(j,j); %%Вычисление нормирующего коэффициента для строки

A(i,:)=A(i,:)-k\*A(j,:); %Вычитание строки с нормирующим коэффициентом

end

disp(A(:,:))

end

1.0000 -0.1705 1.0000 0 0.2954

0 1.0000 -0.0017 0 9.9983

0 0 1.0000 0 1.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

1.0000 -0.1705 0 0 -0.7046

0 1.0000 0 0 10.0000

0 0 1.0000 0 1.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

1.0000 0 0 0 1.0000

0 1.0000 0 0 10.0000

0 0 1.0000 0 1.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

1.0000 0 0 0 1.0000

0 1.0000 0 0 10.0000

0 0 1.0000 0 1.0000

0 0 0 1.0000 40.0000

M = A(:,cols);

**Решение исходной системы:**

disp(M);

1.0000

10.0000

1.0000

40.0000

**Расчёт невязок**

%Невязка

Nev = (B - (Coef\*M));

n1 = norm(Nev, 1);

disp("Невязка (1 норма): " + n1);

Невязка (1 норма): 2.3803e-13

ni = norm(Nev, inf);

disp("Невязка (Inf норма): " + ni);

Невязка (Inf норма): 9.4147e-14

D = (X - M);

disp("D = "+ D);

"D = -8.147e-09"

"D = -3.7712e-09"

"D = 7.5184e-09"

"D = 2.5048e-09"

**Расчёт абсолютной погрешности**

D1 = norm(D, 1);

disp("Абсолютная погрешность (1 норма): " + D1);

Абсолютная погрешность (1 норма): 2.1941e-08

D2 = norm(D, inf);

disp("Абсолютная погрешность (Inf норма): " + D2);

Абсолютная погрешность (Inf норма): 8.147e-09

**Расчёт относительной погрешности**

d1 = norm(D, 1)/norm(X, 1);

disp("Относительная погрешность (1 норма): " + d1);

Относительная погрешность (1 норма): 4.2195e-10

d2 = norm(D, Inf)/norm(X, inf);

disp("Относительная погрешность (Inf норма): " + d2);

Относительная погрешность (Inf норма): 2.0368e-10

**Расчёт чисел обусловленности**

M = inv(Coef);

disp("Обратная матрица:");

Обратная матрица:

disp(M);

1.0e+05 \*

9.2290 -1.5598 9.2240 0.0151

4.2742 -0.7224 4.2742 0.0000

-8.5166 1.4394 -8.5116 -0.0151

-2.8389 0.4798 -2.8389 -0.0000

V1 = norm(Coef, 1)\*norm(M, 1);

disp("Число обусловленности (1 норма): " + V1);

Число обусловленности (1 норма): 2097502206.271

Vinf = norm(Coef, inf)\*norm(M, inf);

disp("Число обусловленности (Inf норма): " + Vinf);

Число обусловленности (Inf норма): 1377034856.6124

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной практической работы были решены две СЛАУ: с хорошо обусловленной и с плохо обусловленной матрицей коэффициентов. По найденным решениям произведён расчёт точности полученных решений.

Степень отклонения полученного решения от точного можно характеризовать при помощи абсолютной погрешности (разность этих значений) и невязки (разницы между левой и правой частями уравнений при подстановке найденного решения). При обычно , но обратное утверждение не всегда верно. На практике, если система не является плохо обусловленной, оценку погрешности осуществляют при помощи невязки (точное решение обычно неизвестно, поэтому погрешность вычислить нельзя).

По результатам практической работы была установлена связь между значениями числа обусловленности матрицы и точностью решения СЛАУ. Чем больше число обусловленности, тем сильнее сказывается на решении линейной системы ошибки в исходных данных (т.е. тем более неустойчив процесс нахождения решения СЛАУ). Так, для хорошо обусловленных матриц (cond(A) близко к 1) малым погрешностям задания вектора В соответствуют малые погрешности решения. Для плохо обусловленных матриц (cond(A) 1) даже при незначительных погрешностях исходных данных погрешности решения могут быть очень велики.

Величина числа обусловленности зависит от выбора типа нормы, используемой при его вычислении. Данный выбор осуществляется исходя из простоты вычисления или особенностей решаемой задачи (в соответствии с требованиями, предъявляемыми к точности решения СЛАУ).